ΚΙΝΕΖΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $m_1, m_2, \dots, m_r$ ανά δύο πρώτοι και ακέραιοι αριθμοί
Έστω $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$. Αν $a_1, a_2, \dots, a_r$ είναι ακέραιοι
τότε κάθε ακέραιος x που ανήκει στην κλάση
$\left(a_1 \beta_1 \frac{m}{m_1} + a_2 \beta_2 \frac{m}{m_2} + \dots + a_r \beta_r \frac{m}{m_r}\right) \bmod m$ θα είναι
λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \bmod m_1 \\ x \equiv a_2 \bmod m_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x \equiv a_r \bmod m_r \end{cases}$$

όπου $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ οι αντίστοιχοι αντιπρόσωποι των αντίστροφων
κλάσεων των $\frac{m}{m_1} \bmod m_1, \frac{m}{m_2} \bmod m_2, \dots, \frac{m}{m_r} \bmod m_r$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να επιλυθεί το σύστημα:

$x \equiv 4 \bmod 7$
$x \equiv 9 \bmod 11$
$x \equiv 4 \bmod 13$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $(7,11) = (11,13) = (7,13) = 1$
Άρα, μπορεί να εφαρμοστεί το κινέζικό θεώρημα.
$m = [7,11,13] = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 7(10+1)(10+3) = 7(100+30+10+3) = 7 \cdot 143 = 1001$
Θα υπολογίσουμε τα $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ όπως και στο θεώρημα.

- $\frac{m}{m_1} \beta_1 = \frac{7 \cdot 11 \cdot 13}{7} \beta_1 = 143 \cdot \beta_1 \equiv 1 \bmod 7 \Rightarrow 3 \cdot \beta_1 \equiv 1 \bmod 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta_1 = 5$
- $\frac{m}{m_2} \beta_2 = \frac{7 \cdot 11 \cdot 13}{11} \beta_2 = 91 \beta_2 \equiv 1 \bmod 11 \Rightarrow 3\beta_2 \equiv 1 \bmod 11 \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta_2 = 4$
- $\frac{m}{m_3} \beta_3 = \frac{7 \cdot 11 \cdot 13}{13} \beta_3 = 77 \cdot \beta_3 \equiv 1 \bmod 13 \Rightarrow 12 \beta_3 \equiv 1 \bmod 13$ (1)

$(12,13) = 1 \rightsquigarrow 13 = 1 \cdot 12 + 1 \Rightarrow 1 = 13 - 12 \Rightarrow [1]_{13} = [12]_{13} \cdot [-1]_{13} \Rightarrow$
$\Rightarrow [1]_{13} = [12]_{13} \cdot [12]_{13}$. Άρα, $([12]_{13})^{-1} = [12]_{13}$.
και άρα, (1) είναι:
$\beta_3 \equiv 12 \bmod 13 \Rightarrow \beta_3 = 12$. Έτσι, συμπεραίνουμε πως:
$x_0 \equiv (143 \cdot 5 \cdot 4 + 91 \cdot 4 \cdot 9 + 77 \cdot 12 \cdot 4) \bmod 105 \equiv (2860 + 3276 + 3696) \bmod 105 \equiv$
$\equiv 9832 \bmod 105 \equiv 67 \bmod 105$.